



TITLE:

[0,1]および、その部分空間上の力学系について (力学系における非線形回路の諸問題)

AUTHOR(S):

郡山, 彬; 松岡, 洋司

---

CITATION:

郡山, 彬 ...[et al]. [0,1]および、その部分空間上の力学系について (力学系における非線形回路の諸問題). 数理解析研究所講究録 1979, 370: 174-183

ISSUE DATE:

1979-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104666>

RIGHT:

$[0,1]$ および、その部分空間上の力学系について.

東海大 理学部 郡山 彬  
松岡 洋司

1° *Expansive homeomorphism* の種々の例が. Bryant [1], Hemmingsen-Reddy [3], Jakobsen-Utz [4], O'Brien [5], O'Brien-Reddy [6], Reddy [7], Utz [9], Williams [9] 等によって得られている. これらの例の多くが, *fixed point* を持っていることに注意しておく. さて, M. Sears [8] は, Cantor set 上の, *expansive homeo.* の全体が, Homeo. 全体の空間内で, *compact-open topology* の下, *dense* であるが, *open* でない事を証明した. この小論に於て我々の目的は, Sears と同様の結果が, より単純な空間に対しても成り立つことを示すことにある. この単純な例から, 次の結果が得られることに注意しておく.

定理  $M$  を向き付けられた PL  $n$ -多様体とし,  $f: M \rightarrow M$  を, 向きを保つ, *expansive PL homeo.* かつ,  $m_0 \in M$  を <sup>isolated</sup> *fixed point* に持つとする. この時, 任意の整数  $k > 0$  に対して, 次の性質を持つような homeo.  $g_k: M \rightarrow M$  と近傍  $U, m_0 \in U \subset M$  が

存在する。  $d$  を  $M$  上の距離とすると、

$$d(g_k(x), f(x)) < \frac{1}{k} \quad (\forall x \in M) \quad \text{かつ} \quad g_k|_U = \text{id}.$$

明らかに、 $g_k$  は expansive ではない。

2. 空間  $J$  上の expansive homeomorphisms.

2.1. 定義  $X=(X, d)$  を、距離  $d$  を持つ距離空間とする。

homeo.  $f: X \rightarrow X$  が次の条件を満たすとき、expansive homeo. と呼ばれる。  
 $\exists$  positive const.  $C = C(X, f)$  s.t.  $\forall x, y \in X, x \neq y$  に対して、  
 $\exists n \in \mathbb{Z} : d(f^n(x), f^n(y)) > C$

2.2. 記号  $f: X \rightarrow X$  を homeo. とする。  $x \in X$  に対して、

$O_f(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$  とし、 $O_f(x)$  の cardinal 数を  $\#O_f(x)$  とする。また  $O_f = \{O_f(x); x \in X\}$  とし、 $\#O_f$  も上と同様に定義する。

$J = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n=1, 2, \dots\}$ ,  $\forall x, y \in J$  に対し  $d(x, y) = |x - y|$  とおく。  $J$  上の homeo. 全体の集合を  $\mathcal{H}$  とし、 $\mathcal{H}$  の位相は、

compact-open topology とする。  $\mathcal{H}$  内の expansive homeo. 全体を  $\mathcal{E}$  とする。

2.3. 補題 map  $f: J \rightarrow J$  が homeo. とする必要十分条件は、

$f$  が 1 対 1, onto map で、かつ、 $f(0)=0$  なることである。

2.4. 補題  $f \in \mathcal{H}$  かつ  $\#O(f) < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{E}$

(証明)  $\#O(f) = n+1 < +\infty$  と仮定する。

(2)

$n$  個の点  $x_1, \dots, x_n \in J$  が存在し、 $0 < x_1 < \dots < x_n$  かつ、

$O(f) = \{0, O_f(x_1), \dots, O_f(x_n)\}$  となる。点  $x_0$  を、 $0 < x_0 < x_1$  を満たす、 $x_1$  に最も近い点とする。

$U = \{x \in J; x \geq x_0\}$  とおくと、明らかに、 $\#U < +\infty$  である。

$C' = \min\{d(x, y); x, y \in U, x \neq y\}$  とおくと、 $C' = x_1 - x_0 > 0$ 。

そこで、任意定数  $C$  を  $0 < C < C'$  となるようにとる。

さて、任意  $x \in J$  に対して、 $x \in O_f(x_k)$  となる  $x_k$  が、

$\{x_1, \dots, x_n\}$  内に存在する。従って、適当な  $m \in \mathbb{Z}$  に対して、

$f^m(x) = x_k$  となる。故に、異なる任意の 2 点  $x, y \in J$  に対し、

$$d(f^m(x), f^m(y)) = d(x_k, f^m(y)) \geq C' > C > 0$$

従って  $f$  は expansive homeo. である。

2.5. 補題 任意の  $n \geq 2$  に対して、 $\#O(f) = n$  なる  $f \in \mathcal{E}$  がある。

(証明)  $f_1$  を、次の様な homeo. とする。

$$\begin{cases} f_1(0) = 0, & f_1\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2^k} \quad (k \geq 1), & f_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \\ f_1\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2^{k+3}} \quad (k \geq 0) \end{cases}$$

明らかに、 $O(f_1) = \{0, O_{f_1}(1)\}$ , i.e.  $\#O(f_1) = 2$ 。

$n \geq 2$  に対しては、 $f_{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} f_1^{n-1} = f_1 \circ f_1 \circ \dots \circ f_1$  とおく。

$f_{n-1} \in \mathcal{H}$  かつ  $\#O(f_{n-1}) = n$  となり、2.4. 補題から、 $f_{n-1} \in \mathcal{E}$ 。

2.6. 補題  $f \in \mathcal{H}$  かつ  $\#O(f) = +\infty$  ならば  $f \notin \mathcal{E}$ 。

(証明)  $\forall \varepsilon > 0$  に対して、 $B(0; \varepsilon)$  を、 $0$  の  $J$  に於ける  $\varepsilon$ -近傍とする。このとき、 $n < +\infty$  が存在し、

$J-B(0; \varepsilon) = \{x_1, \dots, x_n\}$  とする。  $\#O(f) = +\infty$  より、

$O(f) = \{O_f(x_1), \dots, O_f(x_n)\} \neq \emptyset$ . 従って、 $J - \bigcup_{i=1}^n O_f(x_i)$  内に相異なる 2 点  $x, y$  をとることができる。

$x, y \notin O_f(x_i) \quad (i=1, \dots, n)$  より、 $f^k(x), f^k(y) \in B(0; \varepsilon) \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

従って、 $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon$  for all  $k \in \mathbb{Z}$

ここで  $\varepsilon > 0$  は任意であったから、 $f$  は expansive である。

2.7. 定理  $f \in \mathcal{H}$  とする。

$$f \in \Sigma \iff \#O(f) < +\infty$$

(証明) 2.4. および 2.6. 補題から明らか。

ここで、次の様な、興味ある例が存在することに注意しておく。

2.8. 補題 次の性質を満たす homeo.  $f_\infty \in \mathcal{H}$  が存在する。

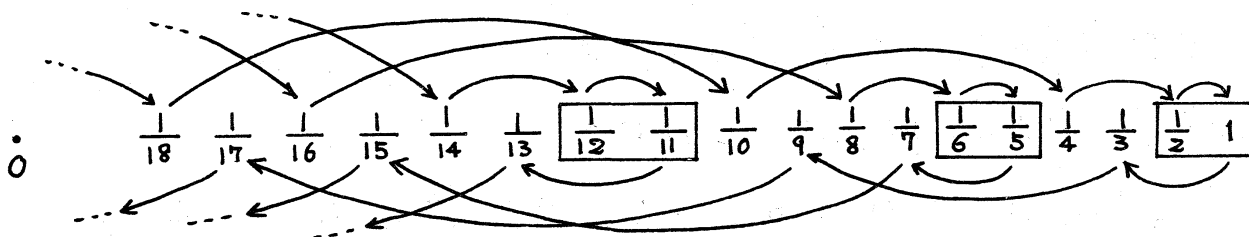
(  $f_\infty$  の fixed point は 0 のみ。かつ、  
 $\#O(f_\infty) = +\infty$  )

(証明)  $x_1 = 1$ ,  $x_k = x_{k-1} + 2^{-k}$  (for  $k \geq 2$ ) とおく。

$f_\infty: J \rightarrow J$  を、以下の様に定義する。(図参照)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_\infty(0) = 0, \quad \text{各 } k \geq 1 \text{ に対して,} \\ f_\infty\left(\frac{1}{x_{k+j} - 2^{-k+1}}\right) = \frac{1}{x_{k+j-1} - 2^{-k+1}} \quad (j \geq 2), \\ f_\infty\left(\frac{1}{x_{k+1} - 2^{-k+1}}\right) = \frac{1}{x_k + 1}, \quad f_\infty\left(\frac{1}{x_k + 1}\right) = \frac{1}{x_k}, \\ f_\infty\left(\frac{1}{x_k}\right) = \frac{1}{x_{k+1} - 2^{-k}}, \quad f_\infty\left(\frac{1}{x_{k+j} - 2^{-k}}\right) = \frac{1}{x_{k+j+1} - 2^{-k}} \quad (j \geq 1) \end{array} \right.$$

(4)



2.9. 定理  $\Sigma$  は  $\mathcal{H}$  で "open" ではない。

(証明)  $\forall f \in \Sigma$  および  $\forall R \geq 1$  に対して、 $g_R \in \mathcal{H}$  を、以下の様に定義する。

$\frac{1}{R} \leq x \leq 1$  を満す各  $x \in J$  に対して、 $O_f(x)$  を考え、 $O_f(x)$  の様子に応じて、 $g_R$  を作る。

(場合(i))  $O_f(x) \subset [\frac{1}{R}, 1]$

この場合は、 $g_R(x) = f(x)$  とおく。

(場合(ii))  $O_f(x) \not\subset [\frac{1}{R}, 1]$

次の条件を満す二点  $y, z$  が存在する。  $y, z \in O_f(x)$  で、

( $y \in [\frac{1}{R}, 1]$  かつ  $y' = f(y) \notin [\frac{1}{R}, 1]$  ,  
 $z \notin [\frac{1}{R}, 1]$  かつ  $f(z) \in [\frac{1}{R}, 1]$ )

そこで、

$$\begin{cases} g_R(w) = f(w) & (\text{for } w \in O_f(x) \cap [\frac{1}{R}, 1]) \\ g_R(z) = f(z) \\ g_R(y') = z \end{cases}$$

とおく。

(場合(Ⅲ)) 上の2つの場合で使用されなかった各  $w \in [0, \frac{1}{k}]$

に対しては、 $g_k(w) = w$  とおく。

以上の様に定義すると、 $\# \mathcal{O}(g_k) = +\infty$  となり、 $g_k \neq \text{id}$ 。

一方、 $d(f, g_k) \leq \frac{1}{k}$  である。 $k$  は任意であったから、

$f$  は、expansive かつ homeo. であり、いくらでも近く、近似することができ。

2.10. 定理  $\Sigma$  は  $\mathcal{H}$  に於て、dense である。

(証明)  $\forall g \in \mathcal{H}$  および  $\forall k \geq 1$  に対して、

$[\frac{1}{k}, 1]$  に於ては、2.9.定理の証明中の、場合(i),(ii)の様に、

周期軌道を作り、 $[0, \frac{1}{k})$  に於ては、2.5.補題の homeo.  $f_1$  を

使って、 $J$  上の expansive homeo. を構成すればよい。

3° より一般的结果について、

2.9.定理の証明のポイントは、fixed point の十分小さな近傍上で、homeo. を id. に修正することであった。この事に注目すれば、1° に於て述べた、より一般的结果を得る。

証明には、次の2つの定理を必要とする。

3.1. 定理 (V.K.A.M. Guillemin [2])  $M$  を PL  $n$ -cell 又は、

PL  $n$ -sphere とする。 $M$  から、自分自身への、向きを保つ、

PL homeo. は、id. に PL isotopic である。

3.2. 定理 (Regular neighborhoods の一意性)

(6)

$M$  を PL 多様体.  $P$  を  $M$  内の compact polyhedron.  $N_1, N_2$  を、共に  $P$  の  $M$  に於る regular nbd. とする.

この時、次の性質を満たす PL homeo.  $h: M \rightarrow M$  が存在する.

$$h(N_1) = N_2, \quad h|_P = \text{id}, \quad h|_{M-K} = \text{id}.$$

( $K$  は  $M$  内の適当な compact set)

(1° で述べた定理の証明)

$W, U_1, U_2$  を、共に、 $m_0$  を含み、次の条件を満たす、closed PL  $n$ -cell とする.

- (i)  $\text{diameter}(W) < \frac{1}{2k}$ ,  $W$  は  $m_0$  以外に fixed pt. を含まない.
- (ii)  $m_0 \in \text{Int } U_2 \subset U_2 \subset \text{Int } U_1 \subset U_1 \subset \text{Int } W$ ,
- (iii)  $U_2 \subset \text{Int } f(U_1)$
- (iv)  $f(U_1) \subset \text{Int } W$

そこで、 $U_2, f(U_2)$  は共に、 $m_0$  の regular nbd. だから、

3.2. 定理より、 $\exists$  PL homeo.  $\mathcal{G}: W \rightarrow W$ ,  $\exists$  compact nbd  $K$  of  $U_2 \cup f(U_2)$  in  $\text{Int } f(U_1)$  s.t.

- (i)  $\mathcal{G}(f(U_2)) = U_2$
- (ii)  $U_2 \cup f(U_2) \subset \text{Int } K$
- (iii)  $\mathcal{G}|_{W-K} = \text{id}.$
- (iv)  $\mathcal{G}(m_0) = m_0$

そこで、

(7)



$$f_1 = \begin{cases} f & \text{on } M - \text{Int } W \\ \varphi \circ f & \text{on } W \end{cases}$$

とあく.  $f_1$  は PL homeo. 7".  $f_1(U_2) = U_2$ ,  $f_1(m_0) = m_0$  7" あり.  $\text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon]$  を  $\text{Bd } U_2$  の  $W - \text{Int } U_2$  に 於る collar nbd 7".  $\text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon] \subset \text{Int } f(U_1)$  とするものとする.

3.1. 定理から.  $\exists$  PL homeo.  $H: \text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon] \rightarrow \text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon]$  s.t.

$$\begin{cases} H(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon) \\ H(x, 0) = (f_1^{-1}(x), 0) \end{cases}, \text{ for all } x \in \text{Bd } U_2$$

と 7".  $H$  を  $M - (\text{Bd } U_2 \times [0, \varepsilon] \cup U_2)^c$  上 id. map として拡張する.

$$g_k = \begin{cases} H \circ f_1 & \text{on } M - \text{Int } U_2 \\ \text{id.} & \text{on } U_2 \end{cases}$$

とあく.

作りおから.  $g_k$  は expansive 7" 7" かつ.

$$d(f(x), g_k(x)) < \frac{1}{2k} \text{ for all } x \in M.$$

となる.

## REFERENCES.

- [1] B.F. BRYANT, Expansive self-homeomorphisms of a compact metric space, Amer. Math. Monthly, 69 (1962) 386-391.
- [2] V.K.A.M. GUGENHEIM, Piecewise linear isotopy, Proc. London Math. Soc., 31 (1953) 29-53.
- [3] E. HEMMINGSEN - W. REDDY, Expansive homeomorphisms on homogeneous spaces, Fund. Math. LXIV (1969) 203-207
- [4] J.F. JAKOBSEN - W.R. UTZ, The nonexistence of expansive homeomorphisms of a closed 2-cell, Proc. J. Math., 10 (1960) 1319-1321.
- [5] T. O'BRIEN, Expansive homeomorphisms on compact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970) 769-771
- [6] T. O'BRIEN - W. REDDY, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphisms, Pacific J. Math., 35 (1970) 737-741.
- [7] W. REDDY, The existence of expansive homeomorphisms on manifolds, Duke Math. J., 32 (1965) 627-632.
- [8] M. SEARS, Expansive self-homeomorphisms of the Cantor set, Math. Systems Theory, 6 (1972) 129-132.
- [9] W.R. UTZ, Unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950) 769-774.

[10] R.F. WILLIAMS, A note on unstable homeomorphisms,  
Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955) 308-309.